Konštitutívne rovnice

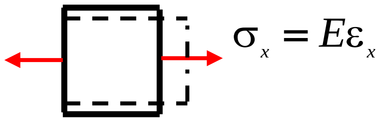
Zovšeobecnený Hookeov zákon

Vyjadruje vzájomný vzťah v bodoch telesa medzi tenzormi napätia τ_{ij} a deformáciou ε_{ij}

Vyjadrenie Hookeovho zákona v inžinierskej pružnosti a pevnosti materiálu

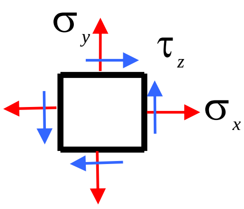
a) Jednoosá napätosť:

Čistý ťah - tlak: $\sigma_x = E\varepsilon_x$ — E - Youngov modul pružnosti



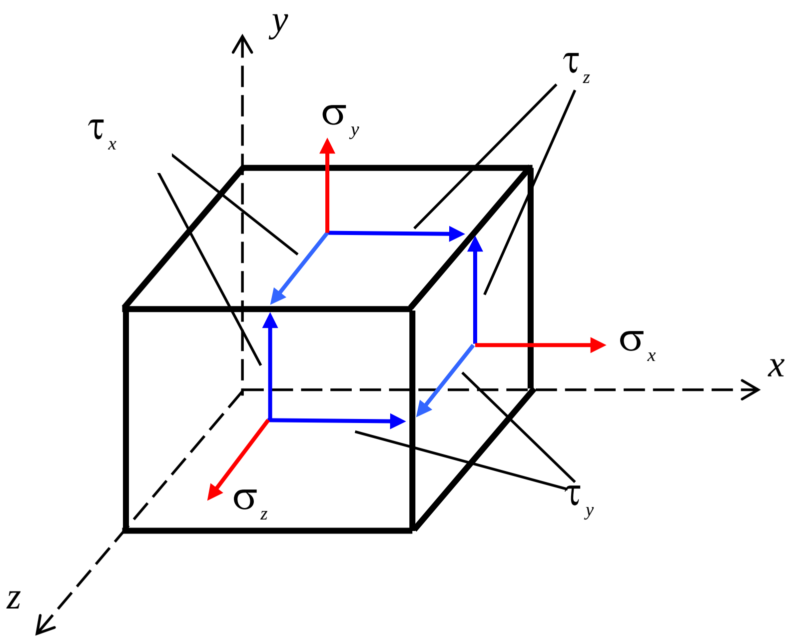
Čistý šmyk (strih): $\tau_z = G\gamma_z$ — G- modul pružnosti v šmyku

b) Rovinná napätosť:



$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m^2E-1}{2m-1} & \frac{m-1}{2m-1} & 0 \\ \frac{m-1}{2m-1} & \frac{m^2E-1}{2m-1} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_z \end{bmatrix}$$

c) Priestorová napätosť:



$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_x\\ \tau_y\\ \tau_z\end{bmatrix} = C\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}$$

Konštanta $C = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\nu = \dfrac{1}{m}$ Poissonove číslo

Tenzorový tvar zovšeobecneného Hookeovho zákona v mechanike kontinua:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

C_{ijkl} je tenzor 4. rádu, má $3^4 = 81$ materiálových konštánt a nazýva sa: Tenzor pružnosti. Vyjadruje, že každá zložka napätia v hmotnom bode telesa je funkciou všetkých zložiek pretvorenia (deformácie).

Opisuje chovanie troch skupín materiálov:

- hookeovské pružné teleso

- neviskózna kvapalina (tuhosť v šmyku je nulová)

- Newtonovská viskózna tekutina (má tuhosť v šmyku závislú na viskozite tekutiny)

Hookeovské pružné teleso

- pevné deformovateľné teleso teleso s objemom V a povrchom S

- vzťah medzi napätím a deformáciou je lineárny

- vonkajšie objemové a plošné sily konajú na posunutí ich pôsobísk vonkajšiu prácu W

-dôsledkom pružnej deformácie sa vo vnútri telesa akumuluje deformačná energia U

- podľa zákona zachovania energie : $W = U$ [J, Nm]

Pretože deformácia telesa je nehomogénna, aj rozloženie deformačnej energie je nehomogénne. Preto sa zavádza pojem pomerná energia deformácie, resp. hustota deformačnej energie dU. Predstavuje energiu v danom bode telesa vzťahovanú na jednotku objemu telesa [J/m^3].

Za predpokladu adiabatickej deformácie (bez výmeny tepla z okolím), musí sa deformačná práca v bode telesa rovnať hustote deformačnej energie v danom bode dW:

$$dW = dW_B + dW_S = d\left(\int_V U dV\right) = \int_V (dU) dV$$

Deformačná práca objemových síl je:

$$dW_B = d\left(\int_V K_i u_i dV\right) = \int_V K_i du_i dV = \iiint_V \left(K_1 du_1 + K_2 du_2 + K_3 du_3\right) dV$$

Deformačná práca plošných síl je:

$$dW_S = d\left(\int_S \overset{j}{T}_i u_i dS\right) = \int_S \overset{j}{T}_i du_i dS = \int_S \tau_{ji} \nu_j du_i dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tau_{ji} du_i\right) dV = \int_V \left(\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} du_i + \tau_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} du_i\right) dV$$

pričom $\overset{j}{T}_i = \tau_{ji} \nu_j$ je vektor napätia na ploške s vonkajšou normálou ν_j a plošný integrál bol Gausovou vetou účelovo premenený na objemový.

Potom energetická rovnica rovnováhy je:

$$\int_V \left(K_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}\right) du_i dV + \int_V \tau_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(du_i\right) dV = \int_V (dU) dV$$

Ak platia diferenciálne rovnice rovnováhy, potom prvý integrál na ľavej strane tejto rovnice je rovný nule. Potom platí:

$$\int_V \tau_{ji} d \in_{ij} dV = \int_V (dU) dV$$

pričom $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(du_i\right) = d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = d \in_{ij}$ a $\in_{ij} = u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$ je gradient posunutia.

Z rovnosti integrálov vyplýva rovnosť integrantov a vylúčením tuhej rotácie ω_{ij} (súčin symetrického a antisymetrického tenzora je rovný nule) dostaneme:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \in_{ij}} = \frac{\partial U\left(\varepsilon_{ij}\right)}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

Z tejto úvahy vyplýva, že ak poznáme rozloženie deformačnej energie, potom jeho deriváciou podľa tenzora deformácie možno určiť tenzor napätia v príslušnom hmotnom bode vzhľadom na vzťažný súradnicový systém.

Napr.: $\tau_{11} = \frac{\partial U\left(\varepsilon_{ij}\right)}{\partial \varepsilon_{11}}, \tau_{22} = \frac{\partial U\left(\varepsilon_{ij}\right)}{\partial \varepsilon_{22}}, \ldots\ldots\ldots, \tau_{32} = \frac{\partial U\left(\varepsilon_{ij}\right)}{\partial \varepsilon_{32}} = \frac{\partial U\left(\varepsilon_{ij}\right)}{\partial \varepsilon_{23}} = \tau_{23}$

Zovšeobecnený Hookeov v tenzorovom tvare

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon kl$$

Tenzor pružnosti má vo všeobecnosti 3^4 = 81 materiálových konštánt pružnosti. Takýto materiál je matematickou abstrakciou virtuálneho materiálu. V skutočnosti môžu byť niektoré jeho zložky nulové alebo rovnaké. Pri natočení súradnicového systému sa transformuje podľa zákona:

$$C'_{ijkl} = a_{io} a_{jp} a_{kr} a_{ls} C_{oprs}$$

Platí, že každá zložka tenzora napätia v danom bode je funkciou všetkých deviatich zložiek tenzora deformácie v tom istom bode vzťahované na ten istý vzťažný súradnicový systém. Napr.:

$$\begin{aligned}
&\tau_{11} = C_{11kl}\varepsilon_{kl} = C_{111l}\varepsilon_{1l} + C_{112l}\varepsilon_{2l} + C_{113l}\varepsilon_{3l} = \\
&C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1112}\varepsilon_{12} + C_{1113}\varepsilon_{13} + \\
&C_{1121}\varepsilon_{21} + C_{1122}\varepsilon_{22} + C_{1123}\varepsilon_{23} + \\
&C_{1131}\varepsilon_{31} + C_{1132}\varepsilon_{32} + C_{1133}\varepsilon_{33}
\end{aligned}$$

Zo symetrie tenzora napätia vyplýva že:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \tau_{ji} = C_{jikl}\varepsilon_{kl}$$

Čiže: $C_{ijkl} = C_{jikl}$, resp. $C_{12kl} = C_{21kl}, C_{23kl} = C_{32kl}, C_{31kl} = C_{13kl}$, tenzor pružnosti je symetrický vzhľadom na prvé dva indexy.

Vzhľadom na symetriu tenzora deformácie musí byť tenzor pružnosti symetrický aj na druhé dva indexy:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

Platí teda: $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$. Potom napr.: $C_{ij12} = C_{ij21}$, $C_{ij13} = C_{ji31}$, $C_{12kl} = C_{12lk}$,..., atď. Potom napr.

$$\begin{aligned}
&\tau_{12} = C_{12kl}\varepsilon_{kl} = C_{121l}\varepsilon_{1l} + C_{122l}\varepsilon_{2l} + C_{123l}\varepsilon_{3l} = \\
&C_{1211}\varepsilon_{11} + C_{1212}\varepsilon_{12} + C_{1213}\varepsilon_{13} + \\
&C_{1221}\varepsilon_{21} + C_{1222}\varepsilon_{22} + C_{1223}\varepsilon_{23} + \\
&C_{1231}\varepsilon_{31} + C_{1232}\varepsilon_{32} + C_{1233}\varepsilon_{33} = \\
&C_{1211}\varepsilon_{11} + C_{1222}\varepsilon_{22} + C_{1233}\varepsilon_{33} + 2\left(C_{1212}\varepsilon_{12} + C_{1223}\varepsilon_{23} + C_{1231}\varepsilon_{31}\right) = \tau_{21}
\end{aligned}$$

Podobne možno vyjadriť ostatné zložky tenzora napätia, čím sa počet nezávislých konštánt pružnosti zníži z 81 na 36.

Ďalšie zníženie počtu nezávislých konštánt tenzora pružnosti vyplynie z predpokladu existencie funkcie hustoty deformačnej energie. Platí, že

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{11}} = \tau_{11} = C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\varepsilon_{22} + \ldots + C_{1132}\varepsilon_{32}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{22}} = \tau_{22} = C_{2211}\varepsilon_{11} + C_{2222}\varepsilon_{22} + \ldots + C_{2232}\varepsilon_{32}$$

Odtiaľ po druhých parciálnych deriváciách plynie:

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{11}\partial \varepsilon_{22}} = C_{1122} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{22}\partial \varepsilon_{11}} = C_{2211}$$

Podobne dostaneme rovnosti:

$$C_{1331} = C_{3113},\ C_{1221} = C_{2112},\ \text{atď.}$$

Všeobecne platí:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} = C_{klij}$$

Čože, tenzor pružnosti je symetrický aj vzhľadom na dvojice indexov *ij* a *kl*. Tým sa počet nezávislých konštánt tenzora pružnosti zníži na 21. Tieto konštanty popisujú pružné vlastnosti v okolí daného hmotného bodu (elementárneho hranola). Vo všeobecnosti môžu byť funkciami polohy daného hmotného bodu (jeho súradníc). Pri konečných pružných deformáciach je nutné rozlišovať medzi deformovanou a nedeformovanou konfiguráciou telesa. To znamená, že tenzor pružnosti treba transformovať do novej konfigurácie pomocou transformačného pravidla tenzorov 4. rádu. Avšak vo väčšine prípadov sa pristupuje ku tomuto faktu dogmaticky a tenzor pružnosti sa tejto transformácií nepodrobuje. Taktiež sa predpokladá homogénnosť materiálových vlastnosti. Avšak pri kompozitných materiálov môže nastať premenlivosť materiálových vlastností tak polohová ako aj smerová. Podmienky homogénnosti pružnosti však plne vyhovujú len v teórii malých pružných deformácií.

Hore uvedených 21 konštánt pružnosti sa zvyknú označovať aj dvojindexovými symbolmi v tvare A_{ij} , i,j = 1,2,3,...,6.

$$
\begin{aligned}
&\tau_{11} = C_{11kl}\varepsilon_{kl} = C_{111l}\varepsilon_{1l} + C_{112l}\varepsilon_{2l} + C_{113l}\varepsilon_{3l} = \\
&C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1112}\varepsilon_{12} + C_{1113}\varepsilon_{13} + \\
&C_{1121}\varepsilon_{21} + C_{1122}\varepsilon_{22} + C_{1123}\varepsilon_{23} + \\
&C_{1131}\varepsilon_{31} + C_{1132}\varepsilon_{32} + C_{1133}\varepsilon_{33} = \\
&\underbrace{C_{1111}}_{A_{11}}\varepsilon_{11} + \underbrace{C_{1122}\varepsilon_{22}}_{A_{12}} + \underbrace{C_{1133}}_{A_{13}}\varepsilon_{33} + \underbrace{2C_{1112}}_{A_{14}}\varepsilon_{12} + \underbrace{2C_{1123}}_{A_{15}}\varepsilon_{23} + \underbrace{2C_{1131}}_{A_{16}}\varepsilon_{31} = \\
&A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22} + A_{13}\varepsilon_{33} + 2A_{14}\varepsilon_{12} + 2A_{15}\varepsilon_{23} + 2A_{16}\varepsilon_{31}
\end{aligned}
$$

Maticový tvar Hokeovho zákona potom je:

$$
\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\
A_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{26} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{66}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{311} \end{bmatrix}
$$

Alebo tiež pomocou zložiek C_{ijkl} :

$$
\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\
C_{2211} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{2231} \\
C_{3311} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{3331} \\
C_{1211} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{1231} \\
C_{2311} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{2331} \\
C_{3111} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{3131}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{bmatrix}
$$

Z existencie funkcie deformačnej energie možno dokázať (tak ako bolo ukázané vyššie), že matica A_{ij}, ktorá nie je tenzorom napriek jej indexovanému zápisu, je symetrická, čiže $A_{ij} = A_{ji}$.

Inverzný vzťah Hookeovho zákona

Formálne možno Hookeov zákon vyjadriť v inverznom tvare:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\tau_{kl}$$

Tenzor 4. rádu, S_{ijkl}, sa nazýva komplianččný tenzor pružnosti. Po podobnej úprave ako bola vykonaná pri Hookeovom zákone, je možné jeho inverzný vzťah vyjadriť pomocou symetrickej matice o rozmere 6×6:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1112} & S_{1113} & S_{1112} & S_{1123} & S_{1131} \\ S_{2211} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_{2231} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{3111} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_{3131} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ 2\tau_{12} \\ 2\tau_{23} \\ 2\tau_{31} \end{bmatrix}$$

Symetria pružnosti

Počet nezávislých zložiek tenzora pružnosti možno ďalej znížiť tak, aby platili pre bežné technické materiály.

Uvažujme existenciu tenzora pružnosti C_{ijkl} v bode telesa vzhľadom na vzťažný súradnicový systém x_i. Po natočení vzťažného súradnicového systému dostaneme nový súradnicový systém x'_j podľa transformačného vzťahu $x'_j = a_{ji}x_i$ s transformačnou maticou a_{ji}. Zložky tenzora pružnosti v natočenom súradnicovom systéme sú:

$$C'_{oprs} = a_{oi}a_{pj}a_{rk}a_{sl}C_{ijkl}$$

Elastické vlastnosti sa vyznačujú určitou symetričnosťou, čiže aj invariantnosťou voči určitému spôsobu natočenia vzťažného súradnicového systému. Toto sa prejaví ďalším znížením počtu nezávislých konštánt pružnosti.

Známe sú nasledovné typy symetrie:

a) symetria vzhľadom na jednu rovinu (monoklinický materiál);

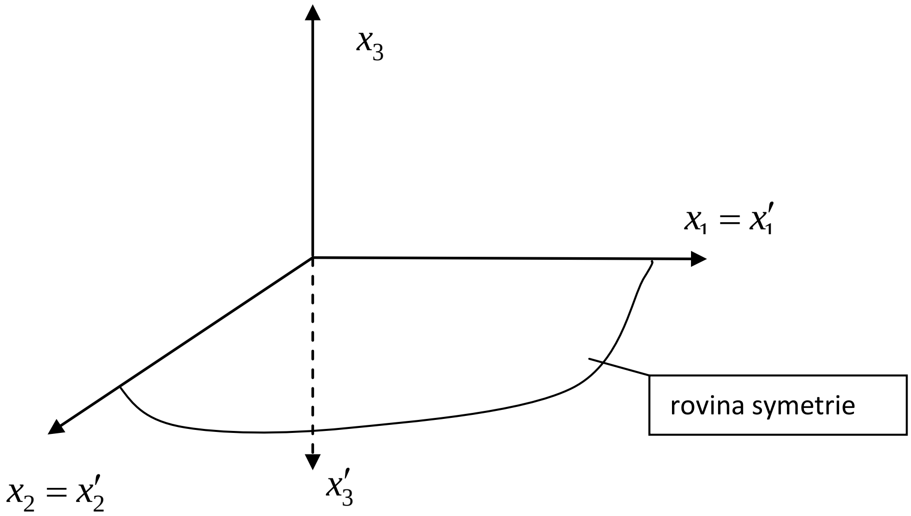
b) symetria na dve navzájom kolmé roviny (ortotropický matriál)

c) rotačná symetria vzhľadom na jednu os (anizotropický materiál)

d) rotačná symetria vzhľadom na dve navzájom kolmé osi (izotropický materiál)

a) Symetria vzhľadom na jednu rovinu

Monoklinický materiál charakterizuje 13 nezávislých konštánt pružnosti. Transformácia vzťažného súradnicového systému x_i do systému x_i' je znázornená na obrázku. Rovinou symetrie je rovina $x_1 - x_2$ resp. $x_1' - x_2'$.



Ak má platiť podmienka symetrie, konštanty pružnosti by mali byť invariantne voči tejto transformácii. Čiže, $C'_{ijkl} = C_{ijkl}$. Transformačná matica a_{ij} predstavuje kosínusy uhlov medzi natočenými a pôvodnými osami súradnicového systému:

$$\cos\left(x_1', x_j\right) = a_{1j} = \left(1,0,0\right)$$
$$\cos\left(x_2', x_j\right) = a_{2j} = \left(0,1,0\right)$$
$$\cos\left(x_3', x_j\right) = a_{3j} = \left(0,0,1\right)$$

Z transformačného zákona tenzora pružnosti máme:

$$C'_{1111} = a_{1p}a_{1q}a_{1r}a_{1s}C_{pqrs} = a_{11}a_{11}a_{11}a_{11}C_{1111} + a_{12}a_{12}a_{12}a_{12}C_{2222} + \ldots + a_{11}a_{12}a_{13}a_{13}C_{1233}$$

Konštanty $a_{ij} = 0$ pre $i \neq j$, a $a_{ij} = 1$ pre $i = j$, takže nakoniec dostaneme

$$C'_{1111} = C_{1111}$$

čo podmienke symetrie (invariantnosti) vyhovuje.

Podobným postupom by sme mali dostať rovnosť $C'_{1123} = a_{1p}a_{1q}a_{2r}a_{3s} = C_{1123}$, avšak v skutočnosti dostaneme $C'_{1123} = -C_{1123}$. Preto musí platiť: $C_{1123} = 0$.

Pre monoklinický materiál sa matica pružnosti zredukuje do tvaru

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1112} & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & 0 & 0 \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & C_{2331} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3123} & C_{3131} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

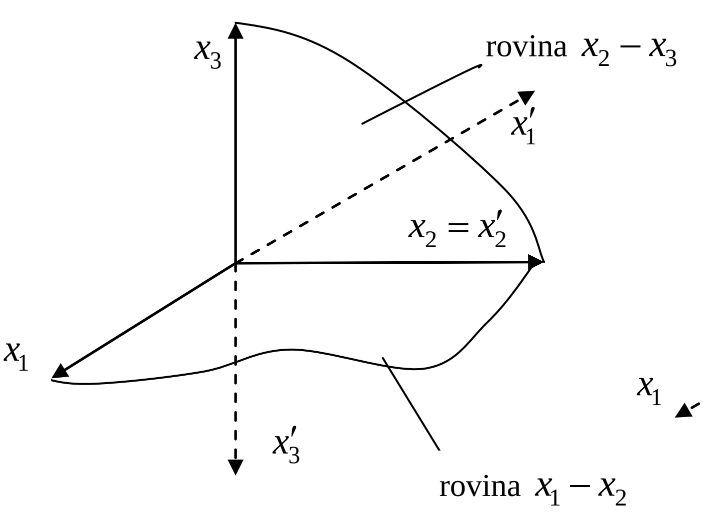
a komplianční matica je

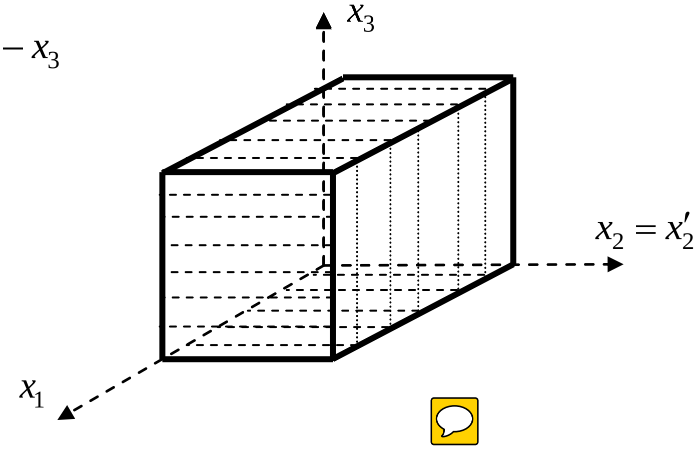
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1112} & S_{1113} & S_{1112} & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2212} & 0 & 0 \\ S_{3311} & S_{2233} & S_{3333} & S_{3312} & 0 & 0 \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2323} & S_{2331} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{3123} & S_{3131} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ 2\tau_{12} \\ 2\tau_{23} \\ 2\tau_{31} \end{bmatrix}$$

Ako vidieť z týchto vzťahov, normálové napätia sú funkciou nielen normálových ale aj šmykovej deformácie, a normálové deformácie sú funkciou nielen normálových, ale aj šmykového napätia.

a) Symetria vzhľadom na dve ortogonálne roviny

Predpokladajme nasledovnú transformáciu súradnicového systému:





Počet nezávislých konštánt sa zmení z 13 na 9 a takýto materiál sa nazýva ortotropický. Napr. kompozit pozostávajúci z matrice a vyplnený symetricky orientovanými vláknami rovnakej veľkosti.

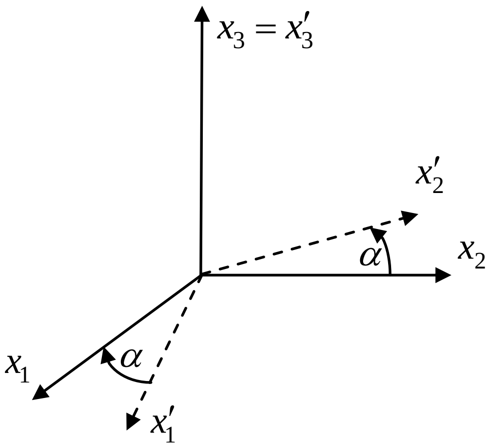
$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1112} & S_{1113} & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311} & S_{2233} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{3131} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ 2\tau_{12} \\ 2\tau_{23} \\ 2\tau_{31} \end{bmatrix}$$

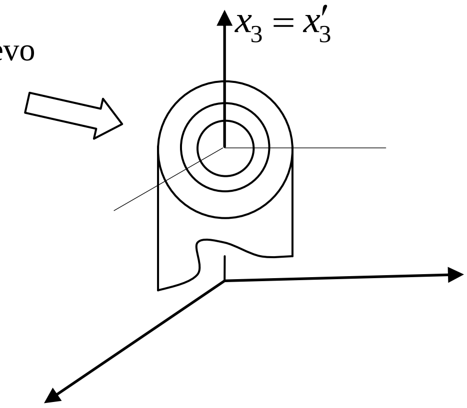
Ako vidieť, normálové napätia spôsobujú len normálové pretvorenia a šmykové napätia tvoria len pomerné skosenia. Platí to však len v súradnicovom systéme na ktorý je definovaná aj symetria materiálových vlastností.

c) Rotačná symetria vzhľadom na jednu os

Takýto materiál sa nazýva anizotropickým a má 5 nezávislých konštánt. Nech osou symetrie je $x_3 = x_3'$.



napr. drevo



Hookeov zákon má tvar (nezávislé členy sú v špeciálnych zátvorkách):

$$\begin{bmatrix}\tau_{11}\\ \tau_{22}\\ \tau_{33}\\ \tau_{12}\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\{C_{1111}\} & \{C_{1122}\} & \{C_{1133}\} & 0 & 0 & 0\\ C_{1212} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0\\ C_{1133} & C_{1133} & \{C_{3333}\} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(C_{1111}-C_{1122}\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{C_{1313}\} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ 2\varepsilon_{12}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{31}\end{bmatrix}$$

Analogicky dostaneme aj jeho inverzný tvar s kompliančnou maticou:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\{S_{1111}\} & \{S_{1122}\} & \{S_{1133}\} & 0 & 0 & 0\\ S_{1122} & S_{1111} & S_{1133} & 0 & 0 & 0\\ S_{1133} & S_{1133} & \{S_{3333}\} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{1111}-S_{1122}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{S_{1313}\} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1313}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\tau_{11}\\ \tau_{22}\\ \tau_{33}\\ 2\tau_{12}\\ 2\tau_{23}\\ 2\tau_{31}\end{bmatrix}$$

d) rotačná symetria na dve navzájom kolmé osi

Takýto materiál sa nazýva izotropickým a je charakterizovaný dvomi nezávislými zložkami tenzora napätia.

Z podmienok symetrie dostaneme oproti predchádzajúcemu prípadu ešte rovnosti:

$$\begin{aligned}C_{1313}&=\frac{1}{2}\left(C_{1111}-C_{1122}\right)\\ C_{3333}&=C_{1111}\\ C_{1133}&=C_{1122}\end{aligned}$$

Matica pružnosti má potom tvar:

$$
\begin{bmatrix}
C_{1111} = \lambda + 2\mu & C_{1122} = \lambda & C_{1122} = \lambda & 0 & 0 & 0 \\
C_{1122} = \lambda & C_{1111} = \lambda + 2\mu & C_{1122} = \lambda & 0 & 0 & 0 \\
C_{1122} = \lambda & C_{1122} = \lambda & C_{1111} = \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(C_{1111} - C_{1122}\right) = \mu & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(C_{1111} - C_{1122}\right) = \mu & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(C_{1111} - C_{1122}\right) = \mu
\end{bmatrix}
$$

Tu zme označili $C_{1111} = \lambda$ a $C_{1212} = \frac{1}{2}\left(C_{1111} - C_{1122}\right) = \mu$. Potom $C_{1111} = \lambda + 2\mu$.

Členy λ a μ nazývame Lamého konštanty. Ich fyzikálny význam ukážeme neskôr.

Inverzný tvar Hookeovho zákona má tvar:

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\{S_{1111}\} & \{S_{1122}\} & S_{1122} & 0 & 0 & 0 \\
S_{1122} & S_{1111} & S_{1122} & 0 & 0 & 0 \\
S_{1122} & S_{1133} & S_{1111} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{1111} - S_{1122}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{1111} - S_{1122}) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{1111} - S_{1122})
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ 2\tau_{12} \\ 2\tau_{23} \\ 2\tau_{31} \end{bmatrix}
$$

Hookeov zákon izotropického materiálu vyjadrený pomocou Lamého konštánt má tvar:

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

Ako sa ukáže, tento zákon možno vyjadriť v tenzorovom tvare:

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{nn}$$

Potom napr.:

$$\tau_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\delta_{11}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right) = 2\mu + \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right)$$

Inverzný vzťah Hookeovho zákona dostaneme v tvare:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\frac{-\lambda}{2\mu\left(3\lambda + 2\mu\right)}\tau_{nn} + \frac{1}{2\mu}\tau_{ij}$$

Zúžením tenzora malých pretvorení máme:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2\mu}\tau_{ii} - \frac{3\lambda}{2\mu}\varepsilon_{nn}$$

pričom sme použili $\delta_{ii} = 3$. Premenovaním sčítacieho indexu *i* na *n* dostaneme:

$$\varepsilon_{nn} = \frac{1}{2\mu}\tau_{nn} - \frac{3\lambda}{2\mu}\varepsilon_{nn} = \frac{\tau_{nn}}{2\mu + 3\lambda}$$

Ak dosadíme ε_{nn} do ε_{ij} a jeho dosadením do τ_{ij} dostaneme horeuvedený Hookeov zákon v tenzorovom tvare

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{nn}$$

ktorý musí platiť pre jednoosovú, rovinnú i priestorovú napätosť.

Teraz možno určiť fyzikálny význam Lamého konštánt. Uvažujme prípad jednoosovej napätosti, t.j. len $\tau_{11} \neq 0$. Jednoosová napätosť spôsobuje pomerné predĺženie v smere osi x_1 $\varepsilon_{11} = \frac{\tau_{11}}{E}$ a pomerné skrátenie $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\tau_{11}$. *E* je modul pružnosti a ν je Poissonove číslo.

Z inverzného Hookeovho zákona máme:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu}\left(1 - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}\right)\tau_{11} = \frac{\tau_{11}}{E}$$

Odtiaľ po úprave máme vzťah medzi modulom pružnosti a Lamého konštantami.:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}$$

Pre pomerné skrátenie máme:

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} = -\frac{\nu}{E}\tau_{11}$$

Odtiaľ

$$\nu = \frac{\lambda E}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}$$

Dosadením za modul pružnosti E máme vzťah medzi Poissonovym číslom a Lamého konštantami:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Riešením rovníc pre E a ν možno dostať inverzné vzťahy medzi Lamého konštantami a inžinierskymi mierkami pružnosti:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

kde Lamého konštanta λ je totožná s modulom pružnosti v šmyku G.

Dosadením do Hookeovho zákona a do jeho inverzného vzťahu dostaneme ich tenzorové vyjadrenie pomocou inžinierskych mierok pružnosti E a ν, ktoré sa získajú experimentálnymi skúškami.

Čiže:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{nn}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\tau_{ij} - \nu\delta_{ij}\tau_{kk}\right]$$

Tabuľka vzájomnej závislosti medzi inžinierskymi mierkami pružnosti a Lamého konštantami

Konštanty	Základná dvojica	
	$\lambda, \mu = G$	E, ν
λ	λ	$\dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
$\mu = G$	μ, G	$\dfrac{E}{2(1+\mu)}$
E	$\dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	E
ν	$\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	ν

Hookeov zákon pre neviskóznu kvapalinu

Je to taká kvapalina, pre ktorú je tenzor napätia izotropický (nezávislý od transformácie vzťažného súradnicového systému):

$$\tau_{ij} = \tau'_{ij} = -p\delta_{ij}$$

kde p je tlak vo všetkých smeroch rovnaký (skalárna veličina). V maticovom vyjadrení:

$$(\tau_{ij}) = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Pre ideálny plyn je tlak p v vzťahovaný v stavovej rovnici na merný objem v a absolútnu teplotu T:

$$pv = RT, p = \frac{RT}{v} = \rho RT$$

pričom ρ je merná hmotnosť (hustota látky kg/m^3) a R je plynová konštanta J/kgK. ak je kvapalina nestlačiteľná, potom merná hmotnosť je konštantná. Pri plynoch je $\rho = \rho(p)$ a vtedy treba prihliadať aj na stavovú rovnicu. Napríklad, vodu a vzduch možno považovať za neviskóznu tekutinu (má nulovú tuhosť voči šmyku) - čiže takáto tekutina nekladie odpor voči zmene tvaru. Na druhej strane, voda má nekonečne veľký odpor voči zmene objemu, avšak vzduch je stlačiteľný.

Nenewtonowské viskózne tekutiny

Je to viskózna tekutina pre ktorú je šmykové napätie funkciou rýchlosti deformácie. Konštitutívny vzťah má tvar:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + D_{ijkl}V_{kl}$$

kde V_{kl} je tenzor rýchlosti deformácie (bodka označuje deriváciu podľa času):

$$V_{kl} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{k,l} + \dot{u}_{l,k}\right) = \dot{\varepsilon}_{kl}$$

a D_{ijkl} je tenzorom 4-tého rádu. Vo väčšine prípadov sa považuje za izotropický tenzor, takže je ho možné vyjadriť pomocou nezávislých konštánt λ a μ:

$$D_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\right)\delta_{jk}$$

Potom Hookeov zákon má tvar

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda V_{lk}\delta_{ij} + 2\mu V_{ij}$$

Zúžením tenzora τ_{ij} dostaneme

$$\tau_{kk} = -3p + (3\lambda + 2\mu)V_{kk}$$

Pretože $\tau_{kk} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$ je veličina invariantná a je nezávislá aj od rýchlosti deformácie. Je zrejmé, že $p = \frac{\tau_{kk}}{3}$, čo má a následok $3\lambda + 2\mu = 0$ a odtiaľ $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$. Na základe toho možno Hookeov zákon vyjadriť pomocou jedinej nezávislej materiálovej veličiny μ:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} - \frac{2}{3}V_{kk}\delta_{ij}$$

Táto rovnica sa nazýva Stokesovou rovnicou a tekutina, ktorá ju spĺňa sa nazýva Stokesovou tekutinou. Konštanta μ sa nazýva koeficientom viskozity. Ak $\mu = 0$, potom dostávame rovnicu neviskóznej tekutiny $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$.

Ak je nutné pri skúmaných javoch zahrnúť vplyv teploty, Hookeov zákon je nutné upraviť do Duhamel-Newtonovho tvaru.